Sur les conditions d'existence des faisceaux semi-stables sur les courbes multiples primitives

Jean-Marc Drézet

SUR LES CONDITIONS D'EXISTENCE DES FAISCEAUX SEMI-STABLES SUR LES COURBES MULTIPLES PRIMITIVES

JEAN–MARC DRÉZET

RÉSUMÉ. We give sufficient conditions for the (semi-)stability of torsion free sheaves on a primitive multiple curve. These conditions are used to prove that some moduli spaces of stable sheaves are not empty. We study mainly the *quasi locally free sheaves of generic type* (this includes the locally free sheaves). These sheaves are *generic*, i.e. for every moduli space of torsion free sheaves, the sheaves of this type correspond to an open subset of the moduli space.

Sommaire

1. Introduction 1
2. Préliminaires 6
3. Faisceaux quasi localement libres de type rigide 11
4. Dualité et torsion 15
5. Conditions d'existence des faisceaux (semi-)stables 21
Références 26

Mathematics Subject Classification : 14D20, 14H60

1. Introduction

Une *courbe multiple primitive* est une variété algébrique complexe de Cohen-Macaulay qui peut localement être plongée dans une surface lisse, et dont la sous-variété réduite associée est une courbe lisse. Les courbes projectives multiples primitives ont été définies et étudiées pour la première fois par C. Bănică et O. Forster dans [1]. Leur classification a été faite dans [2] pour les courbes doubles, et dans [6] dans le cas général. Les faisceaux semi-stables sur des variétés non lisses ont déjà été étudiés par différents auteurs ([15], [3], [4], [19], [20], [21],[12][13]).

On peut espérer en trouver des applications concernant les fibrés vectoriels ou leurs variétés de modules sur les courbes lisses (cf. [9], [17], [18]) en faisant dégénérer des courbes lisses vers une courbe multiple primitive. Le problème de la dégénération des courbes lisses en courbes primitives doubles est évoqué dans [11].

Les articles [5] et [8] sont consacrés à l'étude des faisceaux cohérents et de leurs variétés de modules sur les courbes multiples primitives. On donne ici des critères de (semi-)stabilité et des conditions suffisantes d'existence des faisceaux semi-stables sur ces courbes. On appliquera ensuite ces critères à des faisceaux sans torsion génériques. Les conditions d'existence des faisceaux (semi-)stables s'expriment en fonction d'*invariants* de ces faisceaux, parmi lesquels se trouvent le rang et le degré généralisés.

Le cas des faisceaux localement libres est traité. Dans ce cas les seuls invariants sont le rang et le degré généralisés. Les variétés de modules obtenues sont irréductibles.

On considère aussi des faisceaux plus compliqués, les *faisceaux quasi localement libres de type rigide* non localement libres, où il y a deux invariants supplémentaires (dans ce cas les variétés de modules de faisceaux de rang et degré généralisés fixés peuvent avoir de multiples composantes).

Pour finir on traitera des exemples simples de faisceaux sans torsion non quasi localement libres.

1.1. Faisceaux cohérents sur les courbes multiples primitives

Soient C une courbe projective lisse irréductible, n un entier tel que $n \geq 2$ et Y une courbe multiple primitive de multiplicité n et de courbe réduite associée C. Si $\mathcal{I}_C$ est le faisceau d'idéaux de C dans Y,

$$L \ = \ \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2$$

est un fibré en droites sur C, dit *associé* à Y. Dans cet article on supposera que $\deg(L) < 0$. Le cas où $\deg(L) \geq 0$ est moins intéressant car les seuls faisceaux stables sont alors les fibrés vectoriels stables sur C.

Pour $1 \leq i \leq n$ on note C_i le sous-schéma de Y défini par le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_C^i$. C'est une courbe multiple primitive de multiplicité i et on a une filtration

$$C = C_1 \subset \cdots \subset C_n = Y \ .$$

On notera $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{C_i}$.

Le faisceau $\mathcal{I}_C$ est localement libre de rang 1 sur C_{n-1}. Il existe un fibré en droites $\mathbb{L}$ sur C_n tel que $\mathbb{L}_{|C_{n-1}} = \mathcal{I}_C$. Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur C_n on a donc un morphisme canonique

$$\mathcal{E} \otimes \mathbb{L} \longrightarrow \mathcal{E}$$

dont le noyau et le conoyau sont indépendants du choix de $\mathbb{L}$.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur Y on note $\mathcal{F}_i$ le noyau de la restriction $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_{|C_i}$, $\mathcal{F}^{(i)}$ celui du morphisme canonique $\mathcal{F} \to \mathcal{F} \otimes \mathbb{L}^{-i}$. On a des suites exactes canoniques

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_i \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_{|C_i} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^{(i)} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_i \otimes \mathbb{L}^{-i} \longrightarrow 0.$$

Les quotients $G_i(\mathcal{F}) \ = \ \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i+1}$, $0 \leq i < n$, sont des faisceaux sur C. Ils permettent de définir les *rang généralisé* et le *degré généralisé* de $\mathcal{F}$:

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{rg}(G_i(\mathcal{F})), \qquad \mathrm{Deg}(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n-1} \deg(G_i(\mathcal{F})) \ .$$

Ce sont des invariants par déformation (cf. 2.3, [5], [8]). Si $R(\mathcal{F}) > 0$, le nombre rationnel

$$\mu(\mathcal{F}) \ = \ \frac{\mathrm{Deg}(\mathcal{F})}{R(\mathcal{F})}$$

s'appelle la *pente* de $\mathcal{F}$.

Pour $1 \leq i < n$, on note $\mathcal{F}[i]$ le noyau du morphisme canonique surjectif

$$\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}_{|C_i} \twoheadrightarrow (\mathcal{F}_{|C_i})^{\vee\vee}.$$

1.1.1. *Faisceaux quasi localement libres* - On dit qu'un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur Y est *quasi localement libre* s'il existe des entiers $m_1, \ldots, m_n$ non négatifs tels que $\mathcal{E}$ soit localement isomorphe à

$$\bigoplus_{i=1}^{n} m_i \mathcal{O}_i.$$

Les entiers m_i sont alors uniquement déterminés.

1.1.2. *Faisceaux quasi localement libres de type rigide* - (cf. [8]) Si $\mathcal{E}$ est quasi localement libre on dit qu'il est *de type rigide* s'il est localement libre, ou s'il existe un unique entier k, $1 \leq k \leq n-1$, tel que $m_k \neq 0$, et si on a $m_k = 1$. Donc un faisceau quasi localement libre de type rigide non localement libre est localement isomorphe à un faisceau du type $a\mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_k$, avec $1 \leq k \leq n-1$. L'intérèt de ces faisceaux est que la propriété pour un faisceau d'être quasi localement libre de type rigide est une *propriété ouverte*. En particuliers les faisceaux stables localement libre de type rigide de rang généralisé R et de degré généralisé d constituent un ouvert de la variété de modules des faisceaux stables de rang généralisé R et de degré généralisé d sur C_n.

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre de type rigide localement isomorphe à $a\mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_k$, avec $a \geq 1$, $1 \leq k < n$. Alors les faisceaux $\mathcal{E}_k$ et $\mathcal{E}^{(k)}$ sont localement libres sur C_{n-k}, C_k respectivement. On pose

$$E_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{|C}, \qquad F_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{k|C}, \quad V_{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}^{(k)})_{|C}.$$

Ce sont des fibrés vectoriels sur C de rang $a+1$, a, $a+1$ respectivement. On montre en 3.1 qu'on a une suite exacte canonique

$$(*)_{\mathcal{E}} \qquad 0 \longrightarrow F_{\mathcal{E}} \otimes L^{n-k} \longrightarrow V_{\mathcal{E}} \otimes L^{n-k} \longrightarrow E_{\mathcal{E}} \longrightarrow F_{\mathcal{E}} \longrightarrow 0 .$$

Les rangs et degrés des fibrés $E_{\mathcal{E}}$ et $F_{\mathcal{E}}$ (et donc aussi $V_{\mathcal{E}}$) sont invariants par déformation.

1.1.3. *Construction des faisceaux quasi localement libres de type rigide* - Elle est faite par récurrence sur n dans 3.1.2, 3.2, 3.3 et 3.4. On construit le faisceau $\mathcal{E}$ sur C_n connaissant $\mathcal{E}_1$, dont le support est C_{n-1}, et $\mathcal{E}_{|C}$. A priori il semble plus naturel ce construire $\mathcal{E}$ connaissant $\mathcal{E}_{|C_{n-1}}$. On montre dans 3.5 que cela est impossible car les faisceaux sur C_{n-1} qui sont des restrictions de faisceaux quasi localement libres de type rigide sur C_n sont *spéciaux*.

Cette méthode de construction devrait rendre possible la description précise d'ouverts des variétés de modules de faisceaux stables qui contiennent de tels faisceaux.

1.2. Variétés de modules de faisceaux stables

La (semi-)stabilité au sens de Simpson (cf. [16]) des faisceaux sans torsion sur C_n ne dépend pas du choix d'un fibré en droites très ample sur C_n. Elle est analogue à celle des fibrés (semi-)stables sur les courbes projectives lisses (cf. [5], [8]) : un faisceau sans torsion $\mathcal{E}$ sur C_n est *semi-stable* (resp. *stable*) si pour tout sous-faisceau propre $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ on a $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$ (resp. $<$).

L'hypothèse $\deg(L) < 0$ est justifiée par le fait que dans le cas contraire les seuls faisceaux sans torsion stables sur C_n sont les fibrés vectoriels stables sur C.

Soient R, d des entiers, avec $R \geq 1$. On note $\mathcal{M}(R,d)$ la variété de modules des faisceaux stables de rang généralisé R et de degré généralisé d sur C_n.

Soient a, k, ϵ, δ des entiers, avec $a \geq 1$ et $1 \leq k < n$. Soient

$$R \;=\; an+k, \qquad\qquad d \;=\; k\epsilon + (n-k)\delta + (n(n-1)a + k(k-1))\frac{\deg(L)}{2} \; .$$

Les faisceaux quasi localement libres $\mathcal{E}$ de type générique stables localement isomorphes à $a\mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_k$ et tels que $E_{\mathcal{E}}$ (resp. $F_{\mathcal{E}}$) soit de rang $a+1$ (resp. a) et de degré ϵ (resp. δ) constituent un ouvert irréductible de $\mathcal{M}(R,d)$, dont la sous-variété réduite sous-jacente est notée $\mathcal{N}(a,k,\delta,\epsilon)$ (cf. [8]). A priori $\mathcal{M}(R,d)$ a donc plusieurs composantes irréductibles.

1.3. Principaux résultats

On démontre en 5.1.2 le

Théorème : *Soient $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion sur C_n et k un entier tel que $1 \leq k < n$ et que $\mathcal{E}_k \neq 0$. On suppose que*

(1) $$\mu(\mathcal{E}^{(k)}) \leq \mu(\mathcal{E}), \quad \mu((\mathcal{E}^{\vee})^{(k)}) \leq \mu(\mathcal{E}^{\vee}).$$

Alors, si $\mathcal{E}[k]$, $(\mathcal{E}_{|C_k})^{\vee\vee}$, $(\mathcal{E}^{\vee})[k]$ et $((\mathcal{E}^{\vee})_{|C_k})^{\vee\vee}$ sont semi-stables il en est de même de $\mathcal{E}$.

Si de plus les inégalités de (1) sont strictes, et si $\mathcal{E}[k]$ ou $(\mathcal{E}_{|C_k})^{\vee\vee}$, ainsi que $(\mathcal{E}^{\vee})[k]$ ou $((\mathcal{E}^{\vee})_{|C_k})^{\vee\vee}$ sont stables, alors $\mathcal{E}$ est stable.

Même si on se limitait aux faisceaux quasi localement libres il serait nécessaire de faire intervenir des sous-faisceaux non quasi localement libres : on donne en 2.6 des exemples de fibrés vectoriels sur C_2 dont la filtration de Harder-Narasimhan comporte des faisceaux non quasi localement libres.

Dans tout ce qui suit on suppose que C est de genre $g \geq 2$. On applique d'abord le théorème précédent aux fibrés vectoriels :

Théorème : *Soit $\mathbb{E}$ un fibré vectoriel sur C_n. Alors, si $\mathbb{E}_{|C}$ est semi-stable (resp. stable), il en est de même de $\mathbb{E}$.*

On en déduit que les variétés de modules de fibrés vectoriels stables sur C_n sont non vides, pourvu qu'il n'y ait pas d'incompatibilité au niveau du rang et du degré généralisés. Soient r, δ des entiers avec $r \geq 1$. Alors le rang généralisé R et le degré généralisé d d'un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ sur C_n tel que $\mathbb{E}_{|C}$ soit de rang r et de degré δ sont

$$R = nr, \quad d = n\delta + \frac{n(n-1)}{2} r \deg(L).$$

L'ouvert $U(R,d)$ de $\mathcal{M}(R,d)$ correspondant aux fibrés vectoriels stables est non vide, lisse et irréductible, de dimension

$$1 + nr^2(g-1) - r^2 \frac{n(n-1)}{2} \deg(L).$$

On s'intéresse ensuite aux faisceaux quasi localement libres de type rigide non localement libres :

Théorème : *Soient a, k des entiers tels que $a > 0$ et $1 \leq k < n$. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre de type rigide, localement isomorphe à $a\mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_k$ et tel que*

$$\mu(V_{\mathcal{E}}) + \frac{n}{2}\deg(L) \leq \mu(F_{\mathcal{E}}) \leq \mu(E_{\mathcal{E}}) - \frac{n}{2}\deg(L).$$

Alors si $E_{\mathcal{E}}$, $F_{\mathcal{E}}$ et $V_{\mathcal{E}}$ sont semi-stables, il en est de même de $\mathcal{E}$.

Si les inégalités précédentes sont strictes, et si $E_{\mathcal{E}}$, $F_{\mathcal{E}}$ et $V_{\mathcal{E}}$ sont stables, il en est de même de $\mathcal{E}$.

Le problème de l'*existence* des faisceaux quasi localement libres de type rigide (semi-)stables est plus compliqué que celui de l'existence des fibrés vectoriels (semi-)stables, car si $\mathcal{E}$ en est un, la (semi-)stabilité de $E_{\mathcal{E}}$, $F_{\mathcal{E}}$ et $V_{\mathcal{E}}$ impose des conditions supplémentaires sur les invariants de ces faisceaux, à cause de la suite exacte $(*)_{\mathcal{E}}$.

Avec les notations de 1.2, on montrera en 5.3.3 le

Théorème : *Si on a*

$$\frac{\epsilon}{a+1} < \frac{\delta}{a} < \frac{\epsilon - (n-k)\deg(L)}{a+1}$$

$\mathcal{N}(a,k,\delta,\epsilon)$ est non vide.

Ce résultat généralise la proposition 9.2.1 de [5], où le cas des faisceaux de rang généralisé 3 sur C_2 localement isomorphes à $\mathcal{O}_2 \oplus \mathcal{O}_C$ était traité. La démonstration du théorème précédent utilise la résolution de la *conjecture de Lange* (cf. [14]).

D'après [8], prop. 6.12, la variété $\mathcal{N}(a,k,\delta,\epsilon)$ est irréductible et lisse, et on a

$$\dim(\mathcal{N}(a,k,\delta,\epsilon)) \ = \ 1 - \Big(\frac{n(n-1)}{2}a^2 + k(n-1)a + \frac{k(k-1)}{2}\Big)\deg(L) + (g-1)(na^2 + k(2a+1)).$$

On termine par donner des applications du premier des théorèmes précédents à des faisceaux non quasi localement libres.

Soient $\mathbb{E}$ un fibré vectoriel sur C_n, $E = \mathbb{E}_{|C}$ et Z un ensemble fini de points de C. On pose $z = h^0(\mathcal{O}_Z)$. Soient $\phi : \mathbb{E} \to \mathcal{O}_Z$ un morphisme surjectif, $\mathcal{E}_\phi = \ker(\phi)$ et E_ϕ le noyau du morphisme induit $E \to \mathcal{O}_Z$. On démontrera en 5.4.2 le

Théorème : *Si on a* $z \leq -rg(E)\deg(L)$ *(resp.* $<$*) et si* E *et* E_ϕ *sont semi-stables (resp. stables), alors* $\mathcal{E}_\phi$ *est semi-stable (resp. stable).*

1.4. Plan des chapitres suivants

Le chapitre 2 contient des rappels sur les courbes multiples primitives et les propriétés élémentaires des faisceaux cohérents sur ces courbes. On décrit dans 2.5 la méthode de construction d'un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur C_n connaissant le faisceau $\mathcal{E}_1$ sur C_{n-1} et $\mathcal{E}_{|C}$. Elle sera employée aussi bien pour les faisceaux localement libres que pour les faisceaux quasi localement libres de type rigide. On donne dans 2.6 des exemples de fibrés vectoriels instables sur une courbe double primitive dont la filtration de Harder-Narasimhan n'est pas constituée de faisceaux quasi localement libres. Cela rend nécessaire, dans l'étude de la (semi-)stabilité d'un faisceau, la considération de sous-faisceaux sans torsion généraux dont les filtrations canoniques peuvent comporter des faisceaux ayant de la torsion.

Le chapitre 3 est une étude des faisceaux quasi localement libres de type rigide et de leur construction.

Le chapitre 4 traite de la dualité des faisceaux cohérents sur C_n et des faisceaux de torsion.

Dans le chapitre 5 sont démontrés les résultats énoncés dans 1.3.

2. Préliminaires

2.1. Définition des courbes multiples primitives et notations

Une *courbe primitive* est une variété lisse Y de Cohen-Macaulay telle que la sous-variété réduite associée $C = Y_{red}$ soit une courbe lisse irréductible, et que tout point fermé de Y possède un voisinage pouvant être plongé dans une surface lisse.

Soient P un point fermé de Y, et U un voisinage de P pouvant être plongé dans une surface lisse S. Soit z un élément de l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{S,P}$ de S en P engendrant l'idéal de C dans cet anneau. Il existe alors un unique entier n, indépendant de P, tel que l'idéal de Y dans $\mathcal{O}_{S,P}$ soit engendré par (z^n). Cet entier n s'appelle la *multiplicité* de Y. Si $n = 2$ on dit que Y est une *courbe double*. D'après [6], théorème 5.2.1, l'anneau $\mathcal{O}_{YP}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{CP} \otimes (\mathbb{C}[t]/(t^n))$.

Soit $\mathcal{I}_C$ le faisceau d'idéaux de C dans Y. Alors le faisceau conormal de C, $L = \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2$ est un fibré en droites sur C, dit *associé* à Y. Il existe une filtration canonique

$$C = C_1 \subset \cdots \subset C_n = Y \ ,$$

où au voisinage de chaque point P l'idéal de C_i dans $\mathcal{O}_{S,P}$ est (z^i). On notera $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{C_i}$ pour $1 \leq i \leq n$.

Le faisceau $\mathcal{I}_C$ est un fibré en droites sur C_{n-1}. Il existe d'après [5], théorème 3.1.1, un fibré en droites $\mathbb{L}$ sur C_n dont la restriction à C_{n-1} est $\mathcal{I}_C$. On a alors, pour tout faisceau de $\mathcal{O}_n$-modules $\mathcal{E}$ un morphisme canonique

$$\mathcal{E}\otimes\mathbb{L}\longrightarrow\mathcal{E}$$

qui en chaque point fermé P de C est la multiplication par z.

2.2. Filtrations canoniques

Dans toute la suite de ce chapitre on considère une courbe multiple primitive C_n de courbe réduite associée C. On utilise les notations de 2.1.

Soient P un point fermé de C, M un $\mathcal{O}_{nP}$-module de type fini. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n.

2.2.1. *Première filtration canonique* - On définit la *première filtration canonique de M* : c'est la filtration

$$M_n=\{0\}\subset M_{n-1}\subset\cdots\subset M_1\subset M_0=M$$

telle que pour $0\leq i<n$, M_{i+1} soit le noyau du morphisme canonique surjectif $M_i\to M_i\otimes_{\mathcal{O}_{n,P}}\mathcal{O}_{C,P}$. On a donc

$$M_i/M_{i+1} \ = \ M_i\otimes_{\mathcal{O}_{n,P}}\mathcal{O}_{C,P}, \qquad M/M_i \ \simeq \ M\otimes_{\mathcal{O}_{n,P}}\mathcal{O}_{i,P}, \qquad M_i \ = \ z^iM.$$

On pose, si $i>0$, $G_i(M)=M_i/M_{i+1}$. Le gradué $\mathrm{Gr}(M)=\oplus_{i=0}^{n-1}G_i(M)=\oplus_{i=0}^{n-1}z^iM/z^{i+1}M$ est un $\mathcal{O}_{C,P}$-module.

On définit de même la *première filtration canonique de $\mathcal{E}$* : c'est la filtration

$$\mathcal{E}_n=0\subset\mathcal{E}_{n-1}\subset\cdots\subset\mathcal{E}_1\subset\mathcal{E}_0=\mathcal{E}$$

telle que pour $0\leq i<n$, $\mathcal{E}_{i+1}$ soit le noyau du morphisme canonique surjectif $\mathcal{E}_i\to\mathcal{E}_{i|C}$. On a donc $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}=\mathcal{E}_{i|C}$, $\mathcal{E}/\mathcal{E}_i=\mathcal{E}_{|C_i}$. On pose, si $i\geq 0$,

$$G_i(\mathcal{E}) \ = \ \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}.$$

Le gradué $\mathrm{Gr}(\mathcal{E})$ est un $\mathcal{O}_C$-module.

2.2.2. *Seconde filtration canonique* - On définit la *seconde filtration canonique de M* : c'est la filtration

$$M^{(0)}=\{0\}\subset M^{(1)}\subset\cdots\subset M^{(n-1)}\subset M^{(n)}=M$$

avec $M^{(i)} \ = \ \{u\in M; z^iu=0\}$. Si $M_n=\{0\}\subset M_{n-1}\subset\cdots\subset M_1\subset M_0=M$ est la (première) filtration canonique de M on a $M_i\subset M^{(n-i)}$ pour $0\leq i\leq n$. On pose, si $i>0$, $G^{(i)}(M)=M^{(i)}/M^{(i-1)}$. Le gradué $\mathrm{Gr}_2(M)=\oplus_{i=1}^{n}G^{(i)}(M)$ est un $\mathcal{O}_{C,P}$-module.

On définit de même la *seconde filtration canonique de $\mathcal{E}$* :

$$\mathcal{E}^{(0)}=\{0\}\subset\mathcal{E}^{(1)}\subset\cdots\subset\mathcal{E}^{(n-1)}\subset\mathcal{E}^{(n)}=\mathcal{E}.$$

On pose, si $i>0$,

$$G^{(i)}(\mathcal{E}) \ = \ \mathcal{E}^{(i)}/\mathcal{E}^{(i-1)}.$$

Le gradué $\mathrm{Gr}_2(\mathcal{E})$ est un $\mathcal{O}_C$-module.

2.3. Invariants

2.3.1. *Rang généralisé* - L'entier $R(M) = \mathrm{rg}(\mathrm{Gr}(M))$ s'appelle le *rang généralisé* de M.

L'entier $R(\mathcal{E}) = \mathrm{rg}(\mathrm{Gr}(\mathcal{E}))$ s'appelle le *rang généralisé* de $\mathcal{E}$. On a donc $R(\mathcal{E}) = R(\mathcal{E}_P)$ pour tout $P \in C$.

2.3.2. *Degré généralisé* - L'entier $\mathrm{Deg}(\mathcal{E}) = \deg(\mathrm{Gr}(\mathcal{E}))$ s'appelle le *degré généralisé de* $\mathcal{E}$.

Si $R(\mathcal{E}) > 0$ on pose $\mu(\mathcal{E}) = \mathrm{Deg}(\mathcal{E})/R(\mathcal{E})$ et on appelle ce nombre la *pente* de $\mathcal{E}$.

Le rang et le degré généralisés sont *additifs*, c'est-à-dire que si $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ est une suite exacte de faisceaux cohérents sur C_n alors on a

$$R(\mathcal{E}) = R(\mathcal{E}') + R(\mathcal{E}''), \qquad \mathrm{Deg}(\mathcal{E}) = \mathrm{Deg}(\mathcal{E}') + \mathrm{Deg}(\mathcal{E}''),$$

et sont invariants par déformation.

2.4. Faisceaux quasi localement libres

Soit P un point fermé de C. Soit M un $\mathcal{O}_{n,P}$-module de type fini. On dit que M est *quasi libre* s'il existe des entiers $m_1, \ldots, m_n$ non négatifs et un isomorphisme $M \simeq \bigoplus_{i=1}^n m_i \mathcal{O}_{i,P}$. Les entiers $m_1, \ldots, m_n$ sont uniquement déterminés. On dit que M est *de type* $(m_1, \ldots, m_n)$. On a $R(M) = \sum_{i=1}^n i.m_i$.

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n. On dit que $\mathcal{E}$ est *quasi localement libre* en un point P de C s'il existe un ouvert U de C_n contenant P et des entiers non négatifs $m_1, \ldots, m_n$ tels que pour tout point Q de U, $\mathcal{E}_{n,Q}$ soit quasi localement libre de type $m_1, \ldots, m_n$. Les entiers $m_1, \ldots, m_n$ sont uniquement déterminés et ne dépendent que de $\mathcal{E}$, et on dit que $(m_1, \ldots, m_n)$ est le *type de* $\mathcal{E}$. Sur un voisinage de P, $\mathcal{E}$ est alors isomorphe à $\oplus_{i=1}^n m_i \mathcal{O}_i$.

On dit que $\mathcal{E}$ est *quasi localement libre* s'il l'est en tout point de C_n.

D'après [5] (théorème 5.1.3) $\mathcal{E}$ est quasi localement libre en P si et seulement si pour $0 \leq i < n$, $G_i(\mathcal{E})$ est libre en P.

Il en découle que $\mathcal{E}$ est quasi localement libre si et seulement si pour $0 \leq i < n$, $G_i(\mathcal{E})$ est localement libre sur C.

2.5. Construction des faisceaux cohérents

2.5.1. On décrit ici le moyen de construire un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur C_n, connaissant $\mathcal{E}_{|C}$ et $\mathcal{E}_1$, qui sont des faisceaux sur C et C_{n-1} respectivement.

Soient $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur C_{n-1} et E un fibré vectoriel sur C. On s'intéresse aux faisceaux cohérents $\mathcal{E}$ sur C_n tels que $\mathcal{E}_{|C} = E$ et $\mathcal{E}_1 = \mathcal{F}$. Soit $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to E \to 0$ une suite exacte, associée à $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(E,\mathcal{F})$. On voit aisément que le morphisme canonique $\pi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E}\otimes\mathcal{I}_C \to \mathcal{E}$ induit un morphisme

$$\Phi_{\mathcal{F},E}(\sigma) : E\otimes L \longrightarrow \mathcal{F}_{|C}.$$

On a $\mathcal{E}_{|C} = E$ et $\mathcal{E}_1 = \mathcal{F}$ si et seulement si $\Phi_{\mathcal{F},E}(\sigma)$ est surjectif ([8], lemme 3.13).

On a une suite exacte canonique

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(E,\mathcal{F}^{(1)}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(E,\mathcal{F}) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{F},E}} \mathrm{Hom}(E\otimes L,\mathcal{F}_{|C}) \longrightarrow 0.$$

([8], prop. 3.14).

2.5.2. On suppose que $n \geq 3$. On s'intéresse maintenant aux extensions $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to E \to 0$ associées aux $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(E,\mathcal{F})$ tels que $\Phi_{\mathcal{F},E}(\sigma) = 0$ (donc $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(E,\mathcal{F}^{(1)})$). Dans ce cas $\mathcal{E}$ est localement isomorphe à $\mathcal{F}\oplus E$ (cf. [8], 2.4). Plus précisément dans la suite exacte (2) le terme $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(E,\mathcal{F}^{(1)})$ est en fait $H^1(\mathcal{H}om(E,\mathcal{F}))$. On peut donc représenter σ par un cocycle (f_{ij}) relativement à un recouvrement ouvert (U_i) de C_n, f_{ij} étant un morphisme $E_{|U_{ij}} \to \mathcal{F}_{|U_{ij}}$. Le faisceau $\mathcal{E}$ est obtenu en recollant les $(\mathcal{F}\oplus E)_{|U_i}$ au moyen des morphismes $\begin{pmatrix} I_{\mathcal{F}} & f_{ij} \\ 0 & I_E \end{pmatrix}$ ([8], prop. 2.2).

On suppose maintenant que $\mathcal{F}$ est localement libre sur C_{n-1}. Soit $F = \mathcal{F}_{|C}\otimes L^{-1}$, on a donc $\mathcal{F}^{(1)} = F\otimes L^{n-1}$. En utilisant la construction précénte de $\mathcal{E}$ au moyen d'un cocycle on voit aisément que $\mathcal{E}_{|C} \simeq (F\otimes L)\oplus E$, et qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F\otimes L^{n-1} \longrightarrow \mathcal{E}^{(1)} \longrightarrow E \longrightarrow 0,$$

qui est associée à σ.

2.5.3. *Construction des fibrés vectoriels* - On suppose que $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel sur C_{n-1}. On veut construire et paramétrer les fibrés vectoriels $\mathbb{E}$ sur C_n tels que $\mathbb{E}_1 = \mathcal{F}$. Il convient donc de prendre $E = \mathcal{F}_{|C}\otimes L^{-1}$ et de considérer les extensions $0 \to \mathcal{F} \to \mathbb{E} \to E \to 0$ telles que l'élément associé σ de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(E,\mathcal{F})$ soit tel que $\Phi_{\mathcal{F},E}(\sigma) : E\otimes L \to E\otimes L$ soit l'identité de $E\otimes L$. Si E est simple on montre aisément, en utilisant le fait que $\deg(L) < 0$, que deux éléments σ, σ' de $\Phi^{-1}_{\mathcal{F},E}(I_{E\otimes L})$ définissent des fibrés vectoriels $\mathbb{E}$ isomorphes si et seulement si $\sigma = \sigma'$. Dans ce cas les fibrés vectoriels recherchés sont donc paramétrés par l'espace affine $\Phi^{-1}_{\mathcal{F},E}(I_{E\otimes L}) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(E, E\otimes L^{n-1})$.

2.6. Filtration de Harder-Narasimhan

Rappelons qu'on suppose que $\deg(L) < 0$. On montre ici que la filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré vectoriel sur C_2 n'est pas nécessairement constituée de faisceaux quasi localement libres. Cela entraine que dans l'étude de la (semi-)stabilité des faisceaux localement libres (ou a fortiori quasi localement libres) il faut aussi considérer des sous-faisceaux sans torsion non nécessairement quasi localement libres.

Soient P un point fermé de C_2 et $\mathcal{I}_P$ son faisceau d'idéaux. Soient $z \in \mathcal{O}_{2,P}$ un générateur de l'idéal de C et $x \in \mathcal{O}_{2,P}$ au dessus d'un générateur de l'idéal de P dans $\mathcal{O}_{C,P}$. On a donc $\mathcal{I}_{P,P} = (x, z)$. On a une suite exacte de $\mathcal{O}_{2,P}$-modules

$$(3) \qquad 0 \longrightarrow (x,z) \xrightarrow{\alpha} 2\mathcal{O}_{2,P} \xrightarrow{\beta} (x,z) \longrightarrow 0 \ ,$$

où pour tous $a, b \in \mathcal{O}_{2,P}$

$$\alpha(ax+bz) = (-az, ax+bz), \qquad \beta(a,b) = ax+bz \ .$$

On va globaliser cette suite exacte afin d'obtenir des suites exactes

$$(4) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \mathcal{I}_P \longrightarrow 0 \ ,$$

où $\mathbb{D}$ est fibré en droites sur C_2 et $\mathbb{E}$ un fibré vectoriel de rang 2 sur C_2. Le faisceau $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_2}(\mathcal{I}_P, \mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D})$ est concentré au point P. On en déduit qu'il existe une section s de $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_2}(\mathcal{I}_P, \mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D})$ dont la valeur en P correspond à l'extension (3).

On a un morphisme surjectif canonique

$$\Psi : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_2}(\mathcal{I}_P, \mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D}) \longrightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_2}(\mathcal{I}_P, \mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D})) \ .$$

Donc $\Psi^{-1}(s)$ est non vide. Si $0 \to \mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D} \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_P \to 0$ est une extension associée à un élément de $\Psi^{-1}(s)$, le faisceau $\mathcal{E}$ est localement libre. L'existence des extensions (4) est donc prouvée.

2.6.1. Proposition : *Soit $0 \to \mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D} \to \mathbb{E} \to \mathcal{I}_P \to 0$ une extension, où $\mathbb{D}$ est un fibré en droites sur C_2 et $\mathbb{E}$ un fibré vectoriel de rang 2 sur C_2. Alors si $\deg(\mathbb{D}_{|C}) > 0$, le faisceau $\mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D}$ est le sous-faisceau semi-stable maximal de $\mathbb{E}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{H} \subset \mathbb{E}$ le sous-faisceau semi-stable maximal de $\mathbb{E}$. On a $R(\mathcal{H}) = 1, 2$ ou 3.

On note $\mathbb{L}_x$ le faisceau d'idéaux égal à $\mathcal{O}_2$ sur $C_2 \backslash P$ et à (x) au point P. C'est un fibré en droites sur C_2 et on a $\mathcal{I}_P^\vee \simeq \mathcal{I}_P \otimes \mathbb{L}_x^{-1}$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{E}^\vee \otimes \mathbb{L}_x \otimes \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{I}_P \longrightarrow 0$$

En considérant cette suite exacte on se ramène au cas où $R(\mathcal{H}) = 1$ ou 2.

On montre d'abord que $\mathcal{I}_P$ est semi-stable. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{I}_P$ un sous-faisceau propre tel que $\mathcal{I}_P/\mathcal{F}$ soit sans torsion. On a alors $R(\mathcal{F}) = 1$, donc $\mathcal{F}$ est concentré sur C, et est donc contenu dans $(\mathcal{I}_P)^{(1)} = L$. Donc

$$\mu(\mathcal{F}) \ \leq \ \deg(L) \ \leq \ \mu(\mathcal{I}_P) = \frac{\deg(L) - 1}{2} \ ,$$

(car $\deg(L) < 0$).

Supposons d'abord que $R(\mathcal{H}) = 1$. Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D}$ on a $\mu(\mathcal{H}) \leq \mu(\mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D})$ (car $\mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D}$ est semi-stable), ce qui contredit la maximalité de $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H} \not\subset \mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D}$, on peut voir $\mathcal{H}$ comme un sous-faisceau de $\mathcal{I}_P$, donc $\mu(\mathcal{H}) \leq \mu(\mathcal{I}_P)$, donc $\mu(\mathcal{H}) < \mu(\mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D})$, ce qui est absurde.

On a donc $R(\mathcal{H}) = 2$. Soit r le rang généralisé de l'image $\mathcal{U}$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{I}_P$. Si $r = 0$ on a $\mathcal{H} = \mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D}$, ce qu'il fallait démontrer. Si $r = 2$ on peut voir $\mathcal{H}$ comme un sous-faisceau de $\mathcal{I}_P$ et on a alors encore $\mu(\mathcal{H}) \leq \mu(\mathcal{I}_P)$, ce qui est impossible.

Il reste à traiter le cas où $r = 1$ en montrant qu'il est impossible. Soit d le degré de $\mathcal{U}$ (qui est concentré sur C). On a, puisque $\mathcal{H} \cap (\mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D})$ est aussi de rang généralisé 1

$$\deg(\mathcal{U}) \leq \deg(L) \quad \text{et} \quad \deg(\mathcal{H} \cap (\mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D})) \leq \deg(L) + \deg(\mathbb{D}_{|C}).$$

Donc

$$\mu(\mathcal{H}) \;\leq\; \deg(L) + \frac{\deg(\mathbb{D}_{|C})}{2} \;<\; \frac{\deg(L) - 1}{2} + \deg(\mathbb{D}_{|C}) = \mu(\mathcal{I}_P \otimes \mathbb{D}),$$

ce qui contredit la définition de $\mathcal{H}$. □

2.6.2. Remarque : Si on suppose que $\deg(\mathbb{D}_{|C}) = 0$ on obtient des fibrés vectoriels $\mathbb{E}$ semi-stables de rang 2 sur C_2 dont la filtration de Jordan-Hölder n'est pas constituée de faisceaux quasi localement libres.

3. Faisceaux quasi localement libres de type rigide

Dans toute la suite de ce chapitre on considère une courbe multiple primitive C_n de courbe réduite associée C. On utilise les notations de 2.1, et on suppose que $\deg(L) < 0$.

3.1. Définitions

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent quasi localement libre sur C_n. Soient $a = [\frac{R(\mathcal{E})}{n}]$ et $k = R(\mathcal{E}) - an$. On a donc $R(\mathcal{E}) = an + k$. On dit que $\mathcal{E}$ est de *type rigide* s'il est localement libre si $k = 0$, et localement isomorphe à $a\mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_k$ si $k > 0$. Si $k > 0$ cela revient à dire que $\mathcal{E}$ est de type $(m_1, \ldots, m_n)$, avec $m_i = 0$ si $i \neq k, n$ et $m_k = 0$ ou 1.

Le fait d'être quasi localement libre de type rigide est une *propriété ouverte* : autrement dit si Y une variété algébrique intègre et $\mathcal{F}$ une famille plate de faisceaux cohérents sur C_n paramétrée par Y, alors l'ensemble des points $y \in Y$ tels que $\mathcal{E}_y$ soit quasi localement libre de type rigide est un ouvert de Y ([8], prop. 6.9).

Supposons que $\mathcal{E}$ soit quasi localement libre de type rigide et que $k > 0$. Alors $\mathbb{E} = \mathcal{E}_{|C_k}$ est un fibré vectoriel de rang $a + 1$ sur C_k, et $\mathbb{F} = \mathcal{E}_k$ est un fibré vectoriel de rang a sur C_{n-k}. Donc $\mathcal{E}$ est une extension

$$0 \longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow 0$$

d'un fibré vectoriel de rang $a + 1$ sur C_k par un fibré vectoriel de rang a sur C_{n-k}. De même $\mathbb{V} = \mathcal{E}^{(k)}$ est un fibré vectoriel sur C_k et on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{V} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^{-k} \longrightarrow 0 \ .$$

Posons $E = \mathcal{E}_{|C} = \mathbb{E}_{|C}$, $F = G_k(\mathcal{E}) \otimes L^{-k} = \mathbb{F}_{|C} \otimes L^{-k}$. Alors on a $\mathrm{rg}(E) = a + 1$, $\mathrm{rg}(F) = a$, et

$$\big(G_0(\mathcal{E}), G_1(\mathcal{E}), \ldots, G_{n-1}(\mathcal{E})\big) \;=\; (E, E \otimes L, \ldots, E \otimes L^{k-1}, F \otimes L^k, \ldots, F \otimes L^{n-1}) \ .$$

Donc

$$\mathrm{Deg}(\mathcal{E}) \;=\; k \deg(E) + (n - k) \deg(F) + \big(n(n-1)a + k(k-1)\big) \deg(L)/2 \ .$$

On a
$$G^{(n)}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}/\mathcal{E}^{(n-1)} = \mathcal{E}_{n-1} \otimes L^{1-n} = G_{n-1}(\mathcal{E}) \otimes L^{1-n} = F \ .$$
Posons $V = G^{(k)}(\mathcal{E}) \otimes L^{k-n} = \mathbb{V}_{|C} \otimes L^{k-n}$. On a $\mathrm{rg}(V) = a+1$,
$\deg(V) = \deg(E) - (n-k)\deg(L)$, et
$$\big(G^{(n)}(\mathcal{E}), G^{(n-1)}(\mathcal{E}), \ldots, G^{(1)}(\mathcal{E})\big) \ = \ \big(F, F\otimes L, \ldots, F \otimes L^{n-k-1}, V \otimes L^{n-k}, \ldots, V \otimes L^{n-1}\big) \ .$$
Les morphismes canoniques
$$G_i(\mathcal{E}) \otimes L \hookrightarrow G_{i+1}(\mathcal{E}) \ , \qquad G^{(i+1)} \otimes L \twoheadrightarrow G^{(i)}(\mathcal{E})$$
définissent un morphisme surjectif $\phi : E \to F$ et un morphisme injectif $\psi : F \to V$. D'après [8], cor. 3.4, on a un isomorphisme canonique
$$\ker(\phi) \ \simeq \ \mathrm{coker}(\psi) \otimes L^{n-k}.$$
Posons $D = \ker(\phi)$. C'est un fibré en droites sur C. On a des suites exactes
$$0 \longrightarrow D \longrightarrow E \xrightarrow{\phi} F \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\psi} V \longrightarrow D \otimes L^{k-n} \longrightarrow 0.$$

3.1.1. Notations : On pose $E_{\mathcal{E}} = E$, $F_{\mathcal{E}} = F$, $V_{\mathcal{E}} = V$,
$$\phi_{\mathcal{E}} = \phi : E_{\mathcal{E}} \longrightarrow F_{\mathcal{E}}, \qquad \psi_{\mathcal{E}} = \phi : F_{\mathcal{E}} \longrightarrow V_{\mathcal{E}},$$
et $D_{\mathcal{E}} = D$. On a une suite exacte canonique
$$(*)_{\mathcal{E}} \qquad 0 \longrightarrow F_{\mathcal{E}} \otimes L^{n-k} \longrightarrow V_{\mathcal{E}} \otimes L^{n-k} \longrightarrow E_{\mathcal{E}} \longrightarrow F_{\mathcal{E}} \longrightarrow 0 \ .$$

3.1.2. *Construction et paramétrisation* - On cherche ici à décrire comment on peut obtenir les faisceaux quasi localement libres de type rigide $\mathcal{E}$ précédents. On part d'abord d'un fibré vectoriel $\mathbb{F}$ sur C_{n-k} de rang $a \geq 1$ (cf. 2.5.3 pour la construction et la paramétrisation des fibrés vectoriels) qui sera $\mathcal{E}_k$. On construira ensuite successivement $\mathcal{E}_{k-1}, \cdots, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}$. Il y a deux cas différents : le passage de $\mathbb{F}$ à $\mathcal{E}_{k-1}$, et celui de $\mathcal{E}_i$ à $\mathcal{E}_{i-1}$ si $1 \leq i < k$. On va donc étudier dans les sections suivantes les deux étapes suivantes :

La première étape consiste à étudier les extensions
$$0 \longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow H \longrightarrow 0$$
sur C_{n-k+1}, où H est un fibré vectoriel de rang $a+1$ sur C, telles que le morphisme induit $\Phi_{\mathbb{F},H} : H \to \mathbb{F}_{|C}$ soit surjectif (cf. 2.5). Le faisceau $\mathcal{E}$ est alors quasi localement libre de type rigide, et localement isomorphe à $a\mathcal{O}_{n-k+1} \oplus \mathcal{O}_C$. On a $\mathcal{E}_{|C} = H$ et $\mathcal{E}_1 = \mathbb{F}$.

Dans la seconde étape on part d'un faisceau quasi localement libre de type rigide $\mathcal{G}$ sur C_{n-k+i}, $1 \leq i < k$, localement isomorphe à $a\mathcal{O}_{n-k+i} \oplus \mathcal{O}_i$. Soit $H = \mathcal{G}_{\mathbb{C}} \otimes L^{-1}$. On s'intéresse alors aux extensions
$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow H \longrightarrow 0$$
sur $C_{n-k+i+1}$ telles que le morphisme induit $\Phi_{\mathcal{G},H} : H \otimes L \to H \otimes L$ soit l'identité de $H \otimes L$. Le faisceau $\mathcal{E}$ est alors quasi localement libre de type rigide, et localement isomorphe à $a\mathcal{O}_{n-k+i+1} \oplus \mathcal{O}_{i+1}$. On a $\mathcal{E}_{|C} = H$ et $\mathcal{E}_1 = \mathcal{G}$.

3.2. Construction et paramétrisation - Première étape

On décrit ici la première étape évoquée dans 3.1.2, dont on conserve les notations.

On pose $F = \mathbb{F}_{|C} \otimes L^{-1}$. Soient $\sigma \in \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-k}}(H, \mathbb{F})$ et

$$0 \longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow \mathcal{E}_\sigma \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

l'extension correspondante. On suppose que $\phi = \Phi_{\mathbb{F},H}(\sigma) \otimes I_{L^{-1}} : H \to F$ est surjectif. Soit $D = \ker(\phi)$. On a $E_{\mathcal{E}_\sigma} = H$, $F_{\mathcal{E}_\sigma} = F$, et une suite exacte

$$0 \longrightarrow F \otimes L^{n-k} \longrightarrow V_{\mathcal{E}_\sigma} \otimes L^{n-k} \longrightarrow D \longrightarrow 0. \tag{5}$$

On a d'après 2.5.1 une suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(H, F \otimes L^{n-k}) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-k+1}}(H, \mathbb{F}) \xrightarrow{\Phi_{\mathbb{F},H}} \operatorname{Hom}(H, F) \longrightarrow 0.$$

3.2.1. Lemme : *L'image de σ dans $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-k+1}}(D, \mathbb{F})$ est contenue dans $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(D, F \otimes L^{n-k})$, et c'est l'élément associé à la suite exacte (5).*

Démonstration. Soit σ' l'image de σ dans $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-k+1}}(D, \mathbb{F})$. Notons que la fonctorialité de $\phi_{\mathbb{F},H}$ par rapport à $\mathbb{F}$ et H entraine que $\Phi_{\mathbb{F},D}(\sigma') = 0$. On a donc bien d'après 2.5.2 $\sigma' \in \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(D, F \otimes L^{n-k})$. D'après [7], prop. 4.3.1 on a un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d, hook] & D \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{F} \arrow[r] & \mathcal{E}_\sigma \arrow[r] & H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

l'extension du haut étant associée à σ'. On a $\mathcal{H}^{(1)} \subset \mathcal{E}_\sigma^{(1)}$, et d'après 2.5.2 on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F \otimes L^{n-k} \longrightarrow \mathcal{H}^{(1)} \otimes L^{n-k} \longrightarrow D \longrightarrow 0.$$

Il en découle que $\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{E}_\sigma^{(1)} = V_{\mathcal{E}_\sigma}$. D'après 2.5.2 σ' correspond bien à l'extension (5). □

3.2.2. Proposition : *Pour toute extension*

$$0 \longrightarrow F \otimes L^{n-k} \longrightarrow W \otimes L^{n-k} \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

sur C il existe $\sigma_0 \in \Phi^{-1}_{H,\mathbb{F}}(\phi \otimes I_L)$ tel que l'extension précédente soit isomorphe à l'extension

$$0 \longrightarrow F \otimes L^{n-k} \longrightarrow V_{\mathcal{E}_{\sigma_0}} \otimes L^{n-k} \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

Démonstration. Cela découle du lemme 3.2.1, du carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(H, F \otimes L^{n-k}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-k+1}}(H, \mathbb{F}) \arrow[d] \\
\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(D, F \otimes L^{n-k}) \arrow[r, hook] & \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-k+1}}(D, \mathbb{F})
\end{tikzcd}$$

et de la surjectivité du morphisme de gauche. □

Soient $\phi : H \to \mathbb{F}_{|C}$ un morphisme surjectif et $\eta \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-k+1}}(D, \mathbb{F})$. Alors on a $\Phi_{\mathbb{F},H}(\sigma) = \phi \otimes I_L$ et la suite exacte

$$0 \longrightarrow F \otimes L^{n-k} \longrightarrow V_{\mathcal{E}_{\sigma_0}} \otimes L^{n-k} \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

est associée à η si et seulement si η appartient au sous-espace affine $\Phi^{-1}_{\mathbb{F},H}(\phi \otimes I_L) \cap \psi^{-1}(\eta)$ de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-k+1}}(H, \mathbb{F})$ (ψ désignant l'application canonique $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-k+1}}(H, \mathbb{F}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-k+1}}(D, \mathbb{F})$).

3.3. Construction et paramétrisation - Seconde étape

On décrit ici la seconde étape évoquée dans 3.1.2, dont on conserve les notations.

On suppose que $H = \mathcal{G}_{|C} \otimes L^{-1}$. Soient $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-k+i+1}}(H, \mathcal{G})$ tel que $\Phi_{\mathcal{G},H}(\sigma)$ soit l'identité de $H \otimes L$ et $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{E}_\sigma \to H \to 0$ l'extension correspondante.

3.3.1. Proposition : *On a $E_{\mathcal{E}_\sigma} = E_{\mathcal{G}} \otimes L^{-1}$, $F_{\mathcal{E}_\sigma} = F_{\mathcal{G}} \otimes L^{-1}$, $V_{\mathcal{E}_\sigma} = V_{\mathcal{G}} \otimes L^{-1}$ et $(*)_{\mathcal{E}_\sigma} = (*)_{\mathcal{G}} \otimes L^{-1}$.*

Démonstration. Il suffit de le faire avec $a\mathcal{O}_{n-k+i+1} \oplus \mathcal{O}_{i+1}$ à la place de $\mathcal{E}_\sigma$ en utilisant les isomorphismes locaux $\mathcal{E}_\sigma \simeq a\mathcal{O}_{n-k+i+1} \oplus \mathcal{O}_{i+1}$ et la fonctorialité de $(*)_{\mathcal{E}_\sigma}$, ce qui est immédiat. $\square$

On a d'après 2.5.1 une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(H, \mathcal{G}^{(1)}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-k+i+1}}(H, \mathcal{G}) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{G},H}} \mathrm{Hom}(H \otimes L, \mathcal{G}_{|C}) \longrightarrow 0 .$$

Les faisceaux $\mathcal{E}_\sigma$ considérés ici sont donc indexés par le sous-espace affine $\Phi^{-1}_{\mathcal{G},H}(I_{H\otimes L})$ de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-k+i+1}}(H, \mathcal{G})$.

3.4. Construction et paramétrisation - Conclusion

3.4.1. Proposition : *Soient k, a des entiers tels que $1 \leq k < n$, $a > 0$. Soient E, F, V des fibrés vectoriels sur C de rangs $a+1$, a, $a+1$ respectivement, et*

$$0 \longrightarrow F \otimes L^{n-k} \longrightarrow V \otimes L^{n-k} \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow 0 \tag{6}$$

une suite exacte. Alors il existe un faisceau quasi localement libre de type rigide $\mathcal{E}$, localement isomorphe à $a\mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_k$ et tel que $(*)_\mathcal{E}$ soit isomorphe à (6).

Cela signifie qu'il existe un diagramme commutatif reliant les suite exactes $(*)_\mathcal{E}$ et (6) :

$$\begin{tikzcd}
F \otimes L^{n-k} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & V \otimes L^{n-k} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & F \arrow[d, "\simeq"] \\
F_\mathcal{E} \otimes L^{n-k} \arrow[r] & V_\mathcal{E} \otimes L^{n-k} \arrow[r] & E_\mathcal{E} \arrow[r] & F_\mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

3.5. Restrictions des faisceaux quasi localement libres de type rigide

Les méthodes précédentes de construction de faisceaux quasi localement libres de type rigide se font sur le principe suivant : on part d'un tel faisceau $\mathcal{F}$ sur C_{n-1} et on en construit un $\mathcal{E}$ sur C_n tel que $\mathcal{E}_1 = \mathcal{F}$.

A priori il semblerait plus naturel de chercher un faisceau $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E}_{|C_{n-1}} = \mathcal{F}$. Mais c'est impossible car un faisceau quasi localement libre de type rigide sur C_{n-1}, non localement libre, n'est pas nécessairement la restriction d'un faisceau du même type sur C_n :

3.5.1. Proposition : *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre de type rigide non localement libre sur C_n localement isomorphe à $a\mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_k$, avec $a \geq 1$ et $1 \leq k < n-1$. Alors $(\mathcal{E}_{|C_{n-1}})^{(1)}$ est scindé.*

Démonstration. Soient P un point fermé de C_n et $z \in \mathcal{O}_{n,P}$ un générateur de l'idéal de C. On fixe un isomorphisme $\mathcal{E}_P \simeq a\mathcal{O}_{n,P} \oplus \mathcal{O}_{k,P}$. On a alors $(\mathcal{E}_{|C_{n-1}})_P = a\mathcal{O}_{n-1,P} \oplus \mathcal{O}_{k,P}$, et

$$(\mathcal{E}^{(1)})_P = a(z^{n-1}) \oplus (z^{k-1}), \quad \big((\mathcal{E}_{|C_{n-1}})^{(1)}\big)_P = a\big((z^{n-2})/(z^{n-1})\big) \oplus (z^{k-1}).$$

L'image du morphisme canonique $\lambda : \mathcal{E}^{(1)} \to (\mathcal{E}_{|C_{n-1}})^{(1)}$ au point P est (z^{k-1}). L'autre facteur $a(z^{n-2})/(z^{n-1})$ est $\big((\mathcal{E}_{|C_{n-1}})_{n-2}\big)_P$. On a donc

$$(\mathcal{E}_{|C_{n-1}})^{(1)} \ = \ \mathrm{im}(\lambda) \oplus (\mathcal{E}_{|C_{n-1}})_{n-2}.$$

□

4. Dualité et torsion

On considère dans ce chapitre une courbe multiple primitive C_n de courbe réduite associée C. On utilise les notations de 2.1.

4.1. Généralités sur la dualité des faisceaux cohérents sur C_n

Soient $P \in C$ et M un $\mathcal{O}_{n,P}$-module de type fini. On note $M^{\vee_n}$ le *dual* de M :
$M^{\vee_n} = \mathrm{Hom}(M, \mathcal{O}_{n,P})$. Si aucune confusion n'est à craindre on notera $M^\vee = M^{\vee_n}$. Si N est un $\mathcal{O}_{C,P}$-module, on note N^* le dual de N : $N^* = \mathrm{Hom}(N, \mathcal{O}_{C,P})$.

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n. On note $\mathcal{E}^{\vee_n}$ le *dual* de $\mathcal{E}$: $\mathcal{E}^{\vee_n} = \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_n)$. Si aucune confusion n'est à craindre on notera $\mathcal{E}^\vee = \mathcal{E}^{\vee_n}$. Si E est un faisceau cohérent sur C, on note E^* le dual de E : $E^* = \mathcal{H}om(E, \mathcal{O}_C)$. Ces notations sont justifiées par le fait que $E^\vee \neq E^*$. Plus généralement on a, si i un entier tel que $1 \leq i \leq n$ et $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_i, un isomorphisme canonique

$$\mathcal{E}^{\vee_n} \ \simeq \ \mathcal{E}^{\vee_i} \otimes \mathcal{I}_C^{n-i},$$

($\mathcal{I}_C$ désignant le faisceau d'idéaux de C, qui est un fibré en droites sur C_{n-1}). En particulier, pour tout faisceau cohérent E sur C, on a $E^{\vee_n} \simeq E^* \otimes L^{n-1}$ (cf. [8], lemme 4.1) .

Pour tout entier i tel que $1 \leq i < n$, on a $(\mathcal{E}^\vee)^{(i)} = (\mathcal{E}_{|C_i})^\vee$ ([8], prop. 4.2).

4.1.1. *Sous-faisceau de torsion d'un faisceau cohérent sur C_n* - Soient P un point fermé de C et $x \in \mathcal{O}_{nP}$ un élément au dessus d'un générateur de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{CP}$. Soit M un $\mathcal{O}_{nP}$-module de type fini. Le *sous-module de torsion $T(M)$ de M* est constitué des éléments annulés par une puissance de x. On dit que M est *sans torsion* si ce sous-module est nul. C'est donc le cas si et seulement si pour tout $m \in M$ non nul et tout entier $p > 0$ on a $x^p m \neq 0$.

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n. Le *sous-faisceau de torsion $T(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$* est le sous-faisceau maximal de $\mathcal{E}$ dont le support est fini. Pour tout point fermé P de C on a $T(\mathcal{E})_P = T(\mathcal{E}_P)$. On a donc une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow T(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee} \longrightarrow 0.$$

4.1.2. *Faisceaux réflexifs* - Un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur C_n est réflexif si et seulement si il est sans torsion ([8], théorème 4.4), si et seulement si $\mathcal{E}^{(1)}$ est localement libre sur C ([8], prop. 3.8).

4.2. Dualité des faisceaux de torsion

Soit $\mathbb{T}$ un faisceau de torsion sur C_n. Alors on a évidemment $\mathbb{T}^\vee = 0$. On appelle *dual* de $\mathbb{T}$ le faisceau

$$D_n(\mathbb{T}) \ = \ \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{T}, \mathcal{O}_n).$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur n, on notera plus simplement $\widetilde{\mathbb{T}} = D_n(\mathbb{T})$. Rappelons que pour tout $i \geq 2$ on a $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{T}, \mathcal{O}_n) = 0$ d'après le corollaire 4.6 de [8].

4.2.1. Proposition : *Soit $\mathbb{T}$ un faisceau de torsion sur C_i, $1 \leq i < n$. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$D_n(\mathbb{T}) \ \simeq \ D_i(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{L}^{n-i}.$$

Bien sûr on a $D_i(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{L}^{n-i} \simeq D_i(\mathbb{T})$.

Démonstration. D'après la proposition 2.1 de [8] on a un isomorphisme $D_i(\mathbb{T}) \simeq \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{T}, \mathcal{O}_i)$. On considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_i \otimes \mathbb{L}^{n-i} \longrightarrow \mathcal{O}_n \xrightarrow{\ r\ } \mathcal{O}_{n-i} \longrightarrow 0.$$

Il suffit de montrer que le morphisme induit par r

$$\Phi : \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{T}, \mathcal{O}_n) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{T}, \mathcal{O}_{n-i})$$

est nul.

On considère une résolution localement libre de $\mathbb{T}$:

$$\cdots \mathbb{E}_2 \xrightarrow{f_2} \mathbb{E}_1 \xrightarrow{f_1} \mathbb{E}_0 \longrightarrow \mathbb{T} \longrightarrow 0.$$

Soient P un point fermé de C et $z \in \mathcal{O}_{nP}$ une équation de C. Alors $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{T}, \mathcal{O}_n)$ est isomorphe à la cohomologie de degré 1 du complexe dual

$$\mathbb{E}_0^\vee \xrightarrow{{}^t f_1} \mathbb{E}_1^\vee \xrightarrow{{}^t f_2} \mathbb{E}_2^\vee \cdots$$

et $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{T},\mathcal{O}_{n-i})$ est isomorphe à la cohomologie de degré 1 du complexe obtenu en restreignant le précédent à C_{n-i}. Le morphisme Φ provient du morphisme de complexes

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}_0^\vee \arrow[r, "{}^tf_1"] \arrow[d, "\pi_0"] & \mathbb{E}_1^\vee \arrow[r, "{}^tf_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & \mathbb{E}_2^\vee \cdots \arrow[d, "\pi_2"] \\
(\mathbb{E}_0^\vee)_{|C_{n-i}} \arrow[r, "{}^tf_1"] & (\mathbb{E}_1^\vee)_{|C_{n-i}} \arrow[r, "{}^tf_2"] & (\mathbb{E}_2^\vee)_{|C_{n-i}} \cdots
\end{tikzcd}$$

(les flèches verticales étant les restrictions).

Soient P un point du support de $\mathbb{T}$ et $z\in\mathcal{O}_{nP}$ une équation de C. Soient $\alpha\in\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{T},\mathcal{O}_n)_P$ et $u\in\ker({}^tf_2)$ au dessus de α. Puisque $\mathbb{T}$ est concentré sur C_i, la multiplication par z^i : $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{T},\mathcal{O}_n)_P\to\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{T},\mathcal{O}_n)_P$ est nulle. Donc $z^iu\in\mathrm{im}({}^tf_1)$, et on peut écrire $z^iu={}^tf_1(\theta)$, avec $\theta\in(\mathbb{E}_0^\vee)_P$. On va montrer que θ est multiple de z^i. Pour cela on suppose que ce n'est pas le cas, et on va aboutir à une contradiction. On a donc $\theta=z^k\theta'$, avec $0\leq k<i$ et θ' non multiple de z. On a ${}^tf_1(z^{n-i+k}\theta')=z^nu=0$, et puisque ${}^tf_1$ est injectif, on a $z^{n-i+k}\theta'=0$. Puisque $n-i+k<n$, il en découle que θ' est multiple de z, ce qui est la contradiction recherchée. On peut donc écrire $\theta=z^i\theta'$, d'où $z^i(u-{}^tf_1(\theta'))=0$, et il en découle qu'on peut écrire u sous la forme : $u={}^tf_1(\theta')+z^{n-i}\rho$. Il en découle que $\pi_1(u)={}^tf_1(\pi_0(\theta'))$. On a donc $\Phi_P(\alpha)=0$. □

4.2.2. Corollaire : *Soit $\mathbb{T}$ un faisceau de torsion sur C_n. Alors on a* $h^0(\mathbb{T})=h^0(\widetilde{\mathbb{T}})$.

Démonstration. D'après la proposition 4.2.1, on a, pour tout faisceau de torsion T sur C, $D_n(T)\simeq T$. Le corollaire en découle, en utilisant par exemple la première filtration canonique de $\mathbb{T}$. □

Les faisceaux de torsion sur C_n et les morphismes entre eux constituent une catégorie abélienne et noéthérienne $\mathcal{T}_n(C_n)$, qui est évidemment une sous-catégorie pleine de celle des faisceaux cohérents sur C_n. La dualité définit un foncteur contravariant exact

$$D_n:\mathcal{T}_n(C_n)\longrightarrow\mathcal{T}_n(C_n).$$

4.2.3. Proposition : *Le foncteur D_n est une involution. Donc si $\mathbb{T}$ est un faisceau de torsion sur C_n, il existe un isomorphisme canonique* $\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}\simeq\mathbb{T}$.

Démonstration. Il existe un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ et un morphisme surjectif $f:\mathbb{E}\to\mathbb{T}$. Alors $\mathcal{E}=\ker(f)$ est un faisceau sans torsion, donc réflexif. On obtient donc en dualisant la suite exacte $0\to\mathcal{E}\to\mathbb{E}\to\mathbb{T}\to 0$ les suivantes

$$0\longrightarrow\mathbb{E}^\vee\longrightarrow\mathcal{E}^\vee\longrightarrow\widetilde{\mathbb{T}}\longrightarrow 0,\qquad 0\longrightarrow\mathcal{E}\longrightarrow\mathbb{E}\longrightarrow\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}\to 0$$

d'où on déduit aisément le résultat. □

Si $\mathbb{T}$ est un faisceau de torsion sur C_n, l'entier $h^0(\mathbb{T})$ s'appelle la *longueur* de T. On a

$$h^0(\mathbb{T})\ =\ \sum_{P\in C}\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}_P).$$

4.2.4. Lemme : *Soit $\mathbb{T}$ un faisceau de torsion sur C_n. Alors on a $h^0(G_i(\mathbb{T})) = h^0(G^{(i+1)}(\mathbb{T}))$ pour $0 \leq i < n$.*

Démonstration. Découle aisément du corollaire 3.4 de [8]. □

4.2.5. Corollaire : *Soit $\mathbb{T}$ un faisceau de torsion sur C_n. Alors on a, pour $1 \leq i \leq n$ des isomorphismes canoniques*

$$[\widetilde{\mathbb{T}}]_i \simeq \widetilde{[\mathbb{T}_i]} \otimes \mathbb{L}^i \ , \qquad (\widetilde{\mathbb{T}})^{(i)} \simeq \widetilde{\mathbb{T}/\mathbb{T}_i}, \qquad G^{(i+1)}(\widetilde{\mathbb{T}}) \simeq \widetilde{G_i(\mathbb{T})}.$$

Démonstration. De la suite exacte $0 \to \mathbb{T}_i \to \mathbb{T} \to \mathbb{T}/\mathbb{T}_i \to 0$ on déduit la suivante :

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathbb{T}/\mathbb{T}_i} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{T}} \longrightarrow \widetilde{[\mathbb{T}_i]} \longrightarrow 0.$$

D'après la proposition 4.2.1, $\widetilde{\mathbb{T}/\mathbb{T}_i}$ est concentré sur C_i. On a donc $\widetilde{\mathbb{T}/\mathbb{T}_i} \subset (\widetilde{\mathbb{T}})^{(i)}$. Mais le lemme 4.2.4 entraine que $h^0(\widetilde{\mathbb{T}/\mathbb{T}_i}) = h^0((\widetilde{\mathbb{T}})^{(i)})$, donc on a en fait l'égalité. Il en découle que $\widetilde{[\mathbb{T}_i]} \simeq [\widetilde{\mathbb{T}}]_i \otimes \mathbb{L}^{-i}$.

Le dernier isomorphisme découle de la suite exacte

$$0 \longrightarrow G^{(i+1)}(\widetilde{\mathbb{T}}) \longrightarrow [\widetilde{\mathbb{T}}]_i \otimes \mathbb{L} \longrightarrow [\widetilde{\mathbb{T}}]_{i+1} \longrightarrow 0$$

(cf. lemme 3.2 de [8]), du fait que par définition on a $G_i(\mathbb{T}) = \mathbb{T}_i/\mathbb{T}_{i+1}$, et du premier isomorphisme. □

4.3. Dualité des faisceaux sans torsion

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion sur C_n. Il est donc réflexif (cf. 4.1.2). Les faisceaux $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}^{(i)}$ le sont donc aussi, étant des sous-faisceaux de $\mathcal{E}$. Mais les faisceaux $\mathcal{E}/\mathcal{E}_i$ ne le sont pas en général. On note $\Sigma_i(\mathcal{E})$ le sous-faisceau de torsion de $\mathcal{E}/\mathcal{E}_i$, et $T_i(\mathcal{E})$ celui de $G_i(\mathcal{E})$.

Pour $1 \leq i < n$, on note $\mathcal{E}[i]$ le noyau du morphisme canonique surjectif

$$\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{E}_{|C_i} \twoheadrightarrow (\mathcal{E}_{|C_i})^{\vee\vee}.$$

4.3.1. Proposition : *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion sur C_n. Alors, pour $1 \leq i < n$,*

1 - On a un isomorphisme $\Sigma_i(\mathcal{E}^\vee) \simeq \widetilde{\Sigma_i(\mathcal{E})} \otimes \mathbb{L}^i$, et une suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathcal{E}^\vee)_i \longrightarrow (\mathcal{E}_i)^\vee \otimes \mathbb{L}^i \longrightarrow \Sigma_i(\mathcal{E}^\vee) \longrightarrow 0$$

canoniques.

2 - On a un isomorphisme canonique $\mathcal{E}[i]^\vee \simeq (\mathcal{E}^\vee)_i \otimes \mathbb{L}^{-i}$.

3 - Il existe un morphisme canonique $\phi_i(\mathcal{E}) : \Sigma_{i+1}(\mathcal{E}) \to \Sigma_i(\mathcal{E})$ tel que $\ker(\phi_i(\mathcal{E})) \simeq T_i(\mathcal{E})$, et que $\operatorname{coker}(\phi_i(\mathcal{E})) = R_i(\mathcal{E})$ soit concentré sur C.

4 - Il existe une inclusion canonique

$$G^{(i+1)}(\mathcal{E}^\vee) \hookrightarrow G_i(\mathcal{E})^* \otimes L^{n-1}$$

telle que le quotient soit isomorphe à $R_i(\mathcal{E})$.

Démonstration. En dualisant la suite exacte $0 \to \mathcal{E}_i \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{E}_i \to 0$, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathcal{E}/\mathcal{E}_i)^\vee \longrightarrow \mathcal{E}^\vee \longrightarrow (\mathcal{E}_i)^\vee \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}/\mathcal{E}_i, \mathcal{O}_n) = \widetilde{\Sigma_i(\mathcal{E})} \longrightarrow 0.$$

D'après la proposition 4.2 de [8] on a $(\mathcal{E}/\mathcal{E}_i)^\vee = (\mathcal{E}^\vee)^{(i)}$. On en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathcal{E}^\vee)_i \otimes \mathbb{L}^{-i} \longrightarrow (\mathcal{E}_i)^\vee \longrightarrow \widetilde{\Sigma_i(\mathcal{E})} \longrightarrow 0. \tag{7}$$

En la dualisant et tensorisant par $\mathbb{L}^{-i}$, et en utilisant la proposition 4.2.3 on obtient la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_i \otimes \mathbb{L}^{-i} \longrightarrow ((\mathcal{E}^\vee)_i)^\vee \longrightarrow \Sigma_i(\mathcal{E}) \otimes \mathbb{L}^{-i} \longrightarrow 0, \tag{8}$$

qui est (7) avec $\mathcal{E}^\vee$ à la place de $\mathcal{E}$. On obtient donc l'isomorphisme canonique de 1-. On en déduit 2- en dualisant la suite exacte $0 \to \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}[i] \to \Sigma_i(\mathcal{E}) \to 0$.

On a un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & ((\mathcal{E}^\vee)_{i+1})^\vee \otimes \mathbb{L}^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma_{i+1}(\mathcal{E}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}_i \arrow[r] \arrow[d] & ((\mathcal{E}^\vee)_i)^\vee \otimes \mathbb{L}^i \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma_i(\mathcal{E}) \arrow[r] & 0 \\
 & G_i(\mathcal{E}) \arrow[d] & G^{(i+1)}(\mathcal{E}^\vee)^\vee \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

où les suites horizontales proviennent de (8) et la suite verticale du milieu du lemme 3.2 de [8]. On en déduit aisément 3- et 4-. □

4.4. Invariants du dual d'un faisceau cohérent

4.4.1. Proposition : *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent. Alors on a*

$$R(\mathcal{E}^\vee) = R(\mathcal{E}), \qquad \mathrm{Deg}(\mathcal{E}^\vee) = -\mathrm{Deg}(\mathcal{E}) + R(\mathcal{E})(n-1)\deg(L) + h^0(T(\mathcal{E})).$$

Démonstration. La première assertion concernant les rangs est immédiate, par exemple en se plaçant sur l'ouvert où $\mathcal{E}$ est quasi localement libre. Démontrons la seconde. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{E}/T(\mathcal{E})$, qui est un faisceau sans torsion. On a $\mathrm{Deg}(\mathcal{E}) = \mathrm{Deg}(\mathcal{F}) + h^0(T(\mathcal{E}))$, $R(\mathcal{E}) = R(\mathcal{F})$ et $\mathcal{E}^\vee = \mathcal{F}^\vee$, donc la seconde assertion équivaut à

$$\mathrm{Deg}(\mathcal{F}^\vee) = -\mathrm{Deg}(\mathcal{F}) + R(\mathcal{F})(n-1)\deg(L).$$

On peut donc supposer que $\mathcal{E}$ est sans torsion. On va montrer que

$$\mathrm{Deg}(\mathcal{E}^\vee) = -\mathrm{Deg}(\mathcal{E}) + R(\mathcal{E})(n-1)\deg(L) \tag{9}$$

par récurrence sur n. Si $n=1$ c'est évident. Supposons que $n>1$ et que (9) soit vraie pour $n-1$. On a donc

$$\mathrm{Deg}((\mathcal{E}_1)^{\vee_{n-1}}) = -\,\mathrm{Deg}(\mathcal{E}_1) + R(\mathcal{E}_1)(n-2)\deg(L).$$

Mais d'après 4.1 on a $(\mathcal{E}_1)^{\vee} = (\mathcal{E}_1)^{\vee_{n-1}} \otimes \mathcal{I}_C$, donc

$$\mathrm{Deg}((\mathcal{E}_1)^{\vee}) = \mathrm{Deg}((\mathcal{E}_1)^{\vee_{n-1}}) + R(\mathcal{E}_1)\deg(L),$$

d'où

$$\mathrm{Deg}((\mathcal{E}_1)^{\vee}) = -\,\mathrm{Deg}(\mathcal{E}_1) + R(\mathcal{E}_1)(n-1)\deg(L) \tag{10}$$

(c'est-à-dire que (9) est vraie pour $\mathcal{E}_1$). D'après la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_{|C} \longrightarrow 0$$

on a $\mathrm{Deg}(\mathcal{E}) = \mathrm{Deg}(\mathcal{E}_1) + \mathrm{Deg}(\mathcal{E}_{|C})$. Soit $T = T(\mathcal{E}_{|C})$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathcal{E}_{|C})^{\vee} \longrightarrow \mathcal{E}^{\vee} \longrightarrow (\mathcal{E}_1)^{\vee} \longrightarrow \widetilde{T} \longrightarrow 0,$$

donc

$$\mathrm{Deg}(\mathcal{E}^{\vee}) = \mathrm{Deg}((\mathcal{E}_{|C})^{\vee}) + \mathrm{Deg}((\mathcal{E}_1)^{\vee}) - h^0(T).$$

Mais

$$\mathrm{Deg}((\mathcal{E}_{|C})^{\vee}) - h^0(T) = -\,\mathrm{Deg}(\mathcal{E}_{|C}) + (n-1)R(\mathcal{E}_{|C})\deg(L)$$

(car $(\mathcal{E}_{|C})^{\vee} = (\mathcal{E}_{|C})^{*} \otimes L^{n-1}$). Donc

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{E}^{\vee}) &= \mathrm{Deg}((\mathcal{E}_1)^{\vee}) - \mathrm{Deg}(\mathcal{E}_{|C}) + (n-1)R(\mathcal{E}_{|C})\deg(L) \\ &= -\,\mathrm{Deg}(\mathcal{E}) + R(\mathcal{E})(n-1)\deg(L) \end{aligned}$$

d'après (10). □

4.4.2. Corollaire : *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent réflexif sur C_n. Alors, pour $1 \leq i < n$, on a*

$$R\big((\mathcal{E}^{\vee})_i\big) = R(\mathcal{E}_i), \quad R\big((\mathcal{E}^{\vee})^{(i)}\big) = R(\mathcal{E}^{(i)}), \quad R\big((\mathcal{E}^{\vee})_{|C_i}\big) = R(\mathcal{E}_{|C_i}),$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Deg}\,\big((\mathcal{E}^{\vee})_i\big) &= -\,\mathrm{Deg}(\mathcal{E}_i) + (n+i-1)R(\mathcal{E}_i)\deg(L) - h^0(\Sigma_i(\mathcal{E})), \\ \mathrm{Deg}\,\big((\mathcal{E}^{\vee})_{|C_i}\big) &= \mathrm{Deg}((\mathcal{E}_{|C_i})^{\vee}) - iR(\mathcal{E}_i)\deg(L). \end{aligned}$$

Démonstration. Découle aisément des propositions 4.3.1 et 4.4.1. □

4.4.3. Corollaire : *Soient $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent réflexif sur C_n et i un entier tel que $1 \leq i < n$ et $R(\mathcal{E}_i) > 0$. Alors on a*

$$\mu\big((\mathcal{E}^{\vee})_{|C_i}\big) - \mu\big((\mathcal{E}^{\vee})_i\big) \;=\; \mu(\mathcal{E}_i \otimes \mathbb{L}^{-i}) - \mu(\mathcal{E}^{(i)}) + h^0(\Sigma_i(\mathcal{E}))\Big(\frac{1}{R(\mathcal{E}^{(i)})} + \frac{1}{R(\mathcal{E}_i)}\Big).$$

5. Conditions d'existence des faisceaux (semi-)stables

Dans toute la suite de ce chapitre on considère une courbe multiple primitive C_n de courbe réduite associée C. On utilise les notations de 2.1, et on suppose que $\deg(L) < 0$.

5.1. Critères de (semi-)stabilité

5.1.1. Lemme : *Soient A, A'', B, B'', E, E'' des faisceaux cohérents de rang positif sur C_n, tels que*

$$R(E) = R(A) + R(B), \quad R(E'') = R(A'') + R(B''),$$
$$\mathrm{Deg}(E) = \mathrm{Deg}(A) + \mathrm{Deg}(B), \quad \mathrm{Deg}(E'') = \mathrm{Deg}(A'') + \mathrm{Deg}(B'').$$

On suppose qu'on a $\mu(B) \geq \mu(A)$, $\mu(A'') \geq \mu(A)$, $\mu(B'') \geq \mu(B)$, et que

$$\frac{R(E'')}{R(E)} \geq \frac{R(A'')}{R(A)} \quad .$$

Alors on a $\mu(E'') \geq \mu(E)$. Si de plus $\mu(A'') > \mu(A)$ ou $\mu(B'') > \mu(B)$, alors on a $\mu(E'') > \mu(E)$.

Démonstration. D'aprés les hypothéses

$$\frac{R(E'')}{R(E)} \geq \frac{R(A'')}{R(A)}$$

équivaut à

$$\frac{R(B'')}{R(B)} \geq \frac{R(A'')}{R(A)},$$

et

$$\mu(E'') - \mu(E) \; = \; \frac{\Delta}{R(E)R(E'')},$$

avec

$$\Delta = \big(\mathrm{Deg}(A'') + \mathrm{Deg}(B'')\big)\big(R(A) + R(B)\big) - \big(\mathrm{Deg}(A) + \mathrm{Deg}(B)\big)\big(R(A'') + R(B'')\big).$$

On a

$$\mathrm{Deg}(A'') \geq \mathrm{Deg}(A)\frac{R(A'')}{R(A)}, \qquad \mathrm{Deg}(B'') \geq \mathrm{Deg}(B)\frac{R(B'')}{R(B)},$$

Donc $\Delta \geq \Delta'$, avec

$$\begin{aligned}\Delta' \;&=\; \Big(\mathrm{Deg}(A)\frac{R(A'')}{R(A)} + \mathrm{Deg}(B)\frac{R(B'')}{R(B)}\Big)\big(R(A) + R(B)\big) - \\ &\qquad \big(\mathrm{Deg}(A) + \mathrm{Deg}(B)\big)\big(R(A'') + R(B'')\big) \\ &=\; \big(\mu(B) - \mu(A)\big)\big(R(B'')R(A) - R(A'')R(B)\big).\end{aligned}$$

Le résultat en découle immédiatement. $\square$

5.1.2. Théorème : *Soient $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion sur C_n et k un entier tel que $1 \leq k < n$ et que $\mathcal{E}_k \neq 0$. On suppose que*

$$\mu(\mathcal{E}^{(k)}) \leq \mu(\mathcal{E}), \quad \mu((\mathcal{E}^\vee)^{(k)}) \leq \mu(\mathcal{E}^\vee). \tag{11}$$

Alors, si $\mathcal{E}[k]$, $(\mathcal{E}_{|C_k})^{\vee\vee}$, $(\mathcal{E}^\vee)[k]$ et $((\mathcal{E}^\vee)_{|C_k})^{\vee\vee}$ sont semi-stables il en est de même de $\mathcal{E}$.

Si de plus les inégalités de (11) sont strictes, et si $\mathcal{E}[k]$ ou $(\mathcal{E}_{|C_k})^{\vee\vee}$, ainsi que $(\mathcal{E}^\vee)[k]$ ou $((\mathcal{E}^\vee)_{|C_k})^{\vee\vee}$ sont stables, alors $\mathcal{E}$ est stable.

Démonstration. Supposons que les hypothèses du théorème soient vérifiées. Soit

$$\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{E}''$$

un quotient de $\mathcal{E}$. Il faut montrer que $\mu(\mathcal{E}'') \geq \mu(\mathcal{E})$. On peut supposer que $\mathcal{E}''$ est sans torsion. On a un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{E}[k] \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & (\mathcal{E}_{|C_k})^{\vee\vee} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{E}''[k] \arrow[r] & \mathcal{E}'' \arrow[r] & (\mathcal{E}''_{|C_k})^{\vee\vee} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où les deux flèches verticales de droite sont surjectives. Le cas où $\mathcal{E}''[k] = 0$ est évident. On supposera donc que $\mathcal{E}''[k] \neq 0$. Remarquons que les inégalités (11) équivalent à

$$\mu((\mathcal{E}_{|C_k})^{\vee\vee}) \geq \mu(\mathcal{E}[k]), \quad \mu(((\mathcal{E}^\vee)_{|C_k})^{\vee\vee}) \geq \mu(\mathcal{E}^\vee[k])$$

(car $(\mathcal{E}^\vee)^{(k)} = (\mathcal{E}_{|C_k})^\vee$). Le morphisme vertical de droite du diagramme précédent est surjectif, donc on a $\mu((\mathcal{E}''_{|C_k})^{\vee\vee}) \geq \mu((\mathcal{E}_{|C_k})^{\vee\vee})$ d'après la semi-stabilité de $(\mathcal{E}_{|C_k})^{\vee\vee}$. Le conoyau du morphisme vertical de gauche est de torsion, donc on a $\mu(\mathcal{E}''[k]) \geq \mu(\mathcal{E}[k])$ d'après la semi-stabilité de $\mathcal{E}[k]$. D'après le lemme 5.1.1 on a $\mu(\mathcal{E}'') \geq \mu(\mathcal{E})$ si

$$\frac{R(\mathcal{E}'')}{R(\mathcal{E})} \geq \frac{R(\mathcal{E}''[k])}{R(\mathcal{E}[k])} .$$

On peut donc supposer que

$$\frac{R(\mathcal{E}'')}{R(\mathcal{E})} < \frac{R(\mathcal{E}''[k])}{R(\mathcal{E}[k])} . \tag{12}$$

On utilise maintenant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}''^\vee \longrightarrow \mathcal{E}^\vee \longrightarrow \mathcal{E}'^\vee \longrightarrow 0$$

obtenue en utilisant le fait que $\mathcal{E}''$ est réflexif. D'après le lemme 4.4.1, $\mu(\mathcal{E}'') \geq \mu(\mathcal{E})$ équivaut à $\mu(\mathcal{E}'^\vee) \geq \mu(\mathcal{E}^\vee)$, et d'après le lemme 5.1.1, cette inégalité est vérifiée si

$$\frac{R(\mathcal{E}')}{R(\mathcal{E})} = \frac{R(\mathcal{E}'^\vee)}{R(\mathcal{E}^\vee)} \geq \frac{R(\mathcal{E}'^\vee[k])}{R(\mathcal{E}^\vee[k])} . \tag{13}$$

D'après 4.1.1, on a $R(\mathcal{E}'^\vee[k]) = R(\mathcal{E}'[k])$ et $R(\mathcal{E}^\vee[k]) = R(\mathcal{E}[k])$. Donc (13) équivaut à

$$\frac{R(\mathcal{E}')}{R(\mathcal{E})} \geq \frac{R(\mathcal{E}'[k])}{R(\mathcal{E}[k])} . \tag{14}$$

Puisque $\mathcal{E}'_k$ est contenu dans le noyau du morphisme canonique surjectif $\mathcal{E}_k \to \mathcal{E}''_k$, on a

$$R(\mathcal{E}'[k]) = R(\mathcal{E}'_k) \leq R(\mathcal{E}_k) - R(\mathcal{E}''_k) = R(\mathcal{E}[k]) - R(\mathcal{E}''[k]),$$

donc on peut écrire

$$R(\mathcal{E}'[k]) = R(\mathcal{E}[k]) - R(\mathcal{E}''[k]) - \eta,$$

avec $\eta \geq 0$. Donc (14) sécrit

$$\frac{R(\mathcal{E}'')}{R(\mathcal{E})} \leq \frac{R(\mathcal{E}''[k]) + \eta}{R(\mathcal{E}[k])} \quad .$$

L'inégalité précédente est vraie d'après (12). On a donc bien $\mu(\mathcal{E}'') \geq \mu(\mathcal{E})$.

L'assertion concernant la stabilité se démontre de manière analogue. □

5.2. Le cas des fibrés vectoriels

On suppose que le genre de C est $g \geq 2$.

5.2.1. Théorème : *Soit $\mathbb{E}$ un fibré vectoriel sur C_n. Alors, si $\mathbb{E}_{|C}$ est semi-stable (resp. stable), il en est de même de $\mathbb{E}$.*

Démonstration. Posons $E = \mathbb{E}_{|C}$. Alors les filtrations canoniques de $\mathbb{E}$ sont identiques, et leurs gradués sont

$$\big(G_0(\mathcal{E}), G_1(\mathcal{E}), \ldots, G_{n-1}(\mathcal{E})\big) \;=\; (E, E \otimes L, \ldots, E \otimes L^{n-1}) \; .$$

Les inégalités (11) sont trivialement vérifiées (car $\deg(L) < 0$) pour tout entier k tel que $1 \leq k < n$.

Le théorème 5.2.1 se démontre par récurrence sur n : pour $n = 1$ c'est évident. Supposons que ce soit vrai pour $n - 1 \geq 1$. Alors $\mathbb{E}_1$ est semi-stable (resp. stable). Le théorème 5.1.2 permet alors de conclure que $\mathbb{E}$ est semi-stable (resp. stable). □

5.2.2. *Variétés de modules* - Soient r, δ des entiers tels que $r \geq 1$. Posons

$$R = nr, \quad d = n\delta + \frac{n(n-1)}{2} r \deg(L).$$

Pour tout fibré vectoriel $\mathbb{E}$ sur C_n tel que $\mathbb{E}_{|C}$ soit de rang r et de degré δ, on a $R(\mathbb{E}) = R$ et $\mathrm{Deg}(\mathcal{E}) = d$. Il découle de 2.5.3 que la variété de modules $\mathbb{M}(R, d)$ des fibrés vectoriels stables de rang généralisé R et de degré généralisé d sur C_n est non vide. C'est un ouvert irréductible et lisse de la variété de modules $\mathcal{M}(R, d)$ des faisceaux stables de rang généralisé R et de degré généralisé d. Pour calculer sa dimension on considère un fibré stable $\mathbb{E}$ tel que $R(\mathbb{E}) = R$ et $\mathrm{Deg}(\mathbb{E}) = d$. On a

$$\dim(\mathbb{M}(R, d)) = 1 - \chi(\mathbb{E}^\vee \otimes \mathbb{E}) = 1 + nr^2(g-1) - r^2 \frac{n(n-1)}{2} \deg(L).$$

5.3. Le cas des faisceaux quasi localement libres de type générique

On suppose que le genre de C est $g \geq 2$.

5.3.1. Théorème : *Soient a, k des entiers tels que $a > 0$ et $1 \leq k < n$. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre de type rigide, localement isomorphe à $a\mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_k$ et tel que*

$$\mu(V_\mathcal{E}) + \frac{n}{2}\deg(L) \leq \mu(F_\mathcal{E}) \leq \mu(E_\mathcal{E}) - \frac{n}{2}\deg(L). \tag{15}$$

Alors si $E_\mathcal{E}$, $F_\mathcal{E}$ et $V_\mathcal{E}$ sont semi-stables, il en est de même de $\mathcal{E}$.

Si les inégalités précédentes sont strictes, et si $E_\mathcal{E}$, $F_\mathcal{E}$ et $V_\mathcal{E}$ sont stables, il en est de mème de $\mathcal{E}$.

Démonstration. On ne démontrera que la première assertion, la seconde étant analogue. On utilise les notations de 3.1. Supposons les inégalités (15) vérifiées et $E_\mathcal{E}$, $F_\mathcal{E}$ et $V_\mathcal{E}$ semi-stables. Alors on a

$$\mathcal{E}[k] = \mathcal{E}_k = \mathbb{F}\ , \qquad \mathcal{E}_{|C_k} = \mathbb{E}, \qquad \mathcal{E}^\vee[k] = (\mathcal{E}^\vee)_k = \mathbb{F}\otimes\mathbb{L}^k\ , \qquad (\mathcal{E}^\vee)_{|C_k} = \mathbb{V}^\vee\ .$$

Donc d'après le théorème 5.2.1, $\mathcal{E}[k]$, $\mathcal{E}_{|C_k}$, $\mathcal{E}^\vee[k]$ et $(\mathcal{E}^\vee)_{|C_k}$ sont semi-stables. Un calcul simple montre que les inégalités (15) équivalent aux inégalités (11). La semi-stabilité de $\mathcal{E}$ découle donc du théorème 5.1.2. $\square$

La semi-stabilité de $E_\mathcal{E}$, $F_\mathcal{E}$ et $V_\mathcal{E}$ entrainent d'autres inégalités :

$$\mu(E_\mathcal{E}) \leq \mu(F_\mathcal{E}), \qquad \mu(F_\mathcal{E}) \leq \mu(V_\mathcal{E})$$

(car il existe un morphisme surjectif $E_\mathcal{E} \to F_\mathcal{E}$ et un morphisme injectif $F_\mathcal{E} \to V_\mathcal{E}$). Les inégalités précédentes et (15) équivalent aux inégalités

$$\mu(E_\mathcal{E})\ \leq \mu(F_\mathcal{E})\ \leq \mu(E_\mathcal{E}) - \frac{n-k}{a+1}\deg(L).$$

5.3.2. *Variétés de modules de faisceaux stables* - Soient a, k, ϵ, δ des entiers, avec $a \geq 1$ et $1 \leq k < n$. Soient

$$R\ =\ an + k, \qquad d\ =\ k\epsilon + (n-k)\delta + (n(n-1)a + k(k-1))\frac{\deg(L)}{2}\ .$$

On note $\mathcal{M}(R,d)$ la variété de modules des faisceaux stables de rang généralisé R et de degré généralisé d sur C_n. Les faisceaux quasi localement libres $\mathcal{E}$ de type générique stables localement isomorphes à $a\mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_k$ et tels que $E_\mathcal{E}$ (resp. $F_\mathcal{E}$) soit de rang $a+1$ (resp. a) et de degré ϵ (resp. δ) constituent un ouvert irréductible de $\mathcal{M}(R,d)$, dont la sous-variété réduite associée est notée $\mathcal{N}(a,k,\delta,\epsilon)$.

5.3.3. Théorème : *Si on a*

$$\frac{\epsilon}{a+1}\ <\ \frac{\delta}{a}\ <\ \frac{\epsilon-(n-k)\deg(L)}{a+1}$$

$\mathcal{N}(a,k,\delta,\epsilon)$ est non vide.

Démonstration. Les hypothèses et [14] impliquent qu'il existe des fibrés stables E, F, V sur C, tels que

$$rg(E) = a+1, \quad \deg(E) = \epsilon, \quad \mathrm{rg}(F) = a, \quad \deg(F) = \delta,$$
$$\mathrm{rg}(V) = a+1, \quad \deg(V) = \epsilon - (n-k)\deg(L)$$

tels qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow F \otimes L^{n-k} \longrightarrow V \otimes L^{n-k} \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

D'après la proposition 3.4.1 il existe un faisceau quasi localement libre de type rigide $\mathcal{E}$, localement isomorphe à $a\mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_k$ et tel que $(*)_{\mathcal{E}}$ soit isomorphe à la suite exacte précédente. D'après le théorème 5.3.1, $\mathcal{E}$ est stable, et définit donc un point de $\mathcal{N}(a,k,\delta,\epsilon)$. □

5.4. Exemple d'application à des faisceaux non quasi localement libres

Soient $\mathbb{E}$ un fibré vectoriel sur C_n, $E = \mathbb{E}_{|C}$ et Z un ensemble fini de points de C. On pose $z = h^0(\mathcal{O}_Z)$. Soient $\phi : \mathbb{E} \to \mathcal{O}_Z$ un morphisme surjectif, et $\mathcal{E}_\phi = \ker(\phi)$. On a deux suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_\phi \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow \mathbb{E}^\vee \longrightarrow \mathcal{E}_\phi^\vee \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0.$$

Le morphisme ϕ se factorise par E. On note E_ϕ le noyau du morphisme induit $E \to \mathcal{O}_Z$. On note $\mathcal{E}'_\phi$ le noyau du morphisme induit $\mathbb{E}_{|C_{n-1}} \to \mathcal{O}_Z$.

5.4.1. Lemme : *On a* $\mathcal{E}_\phi[1] = \mathbb{E}_1$, $(\mathcal{E}_{\phi|C})^{\vee\vee} = E_\phi$, $\mathcal{E}_\phi^\vee[1] = (\mathcal{E}'_\phi)^\vee$ *et* $\big((\mathcal{E}_\phi)^\vee)_{|C}\big)^{\vee\vee} = E^*$.

Démonstration. Il suffit de le démontrer en un point P de Z. Soit $z \in \mathcal{O}_{n,P}$ une équation de C et $x \in \mathcal{O}_{n,P}$ au dessus d'un générateur de l'idéal maximal de P dans $\mathcal{O}_C$. Si $r = \mathrm{rg}(\mathbb{E}_{|C})$, on a $\mathcal{E}_{\phi,P} \simeq r\mathcal{O}_{n,P} \oplus (x,z)$. On peut donc supposer que $\mathcal{E}_{\phi,P} = (x,z)$. Il faut montrer que $\mathcal{E}_\phi[1]_P = (z)$. On a $(x,z)_{|C} = (x)/(xz) \oplus (z)/(xz,z^2)$. Le premier facteur est isomorphe à $\mathcal{O}_{C,P}$ et le second à $\mathbb{C}$. Donc $\mathcal{E}_\phi[1]_P$ est le noyau du morphisme

$$\begin{array}{ccc} (x,z) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{C,P} \\ ax+bz & \longmapsto & \overline{a} \end{array}$$

($\overline{a}$ désignant l'image de a dans $\mathcal{O}_{C,P}$). On a donc $\mathcal{E}_\phi[1]_P = (z) = \mathbb{E}_{1,P}$. On a $\mathcal{E}_{\phi|C} = E_\phi \oplus \mathcal{O}_Z$, donc $(\mathcal{E}_{\phi|C})^{\vee\vee} = E_\phi$.

On a $\mathcal{E}_\phi^\vee[1] = ((\mathcal{E}_\phi)_1)^\vee \otimes \mathbb{L}$ d'après la proposition 4.3.1, 2-. On a un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \otimes L^{n-1} = (\mathcal{E}_\phi)^{(1)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}_\phi \arrow[r] \arrow[d, hook] & (\mathcal{E}_\phi)_1 \otimes \mathbb{L}^{-1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E \otimes L^{n-1} = \mathbb{E}^{(1)} \arrow[r] & \mathbb{E} \arrow[r] & \mathbb{E}_{|C_{n-1}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

On en déduit immédiatement la troisième égalité. On a enfin

$$((\mathcal{E}^\vee)_{|C})^{\vee\vee} = (\mathcal{E}^{(1)})^\vee = (E \otimes L^{n-1})^\vee = E^*.$$

□

5.4.2. Théorème : *Si on a* $z \leq -rg(E)\deg(L)$ *(resp.* $<$*) et si* E *et* E_ϕ *sont semi-stables (resp. stables), alors* $\mathcal{E}_\phi$ *est semi-stable (resp. stable).*

Démonstration. Cela se démontre aisément par récurrence sur n, en utilisant le lemme 5.4.1 et les théorèmes 5.1.2 et 5.2.1. □

Références

[1] Bănică, C., Forster, O. *Multiple structures on space curves.* In Contemporary Mathematics 58, Proc. of Lefschetz Centennial Conf. (1986), AMS, 47-64.

[2] Bayer, D., Eisenbud, D. *Ribbons and their canonical embeddings.* Trans. of the Amer. Math. Soc. 347, 3 (1995), 719-756.

[3] Bhosle Usha N. *Generalized parabolic bundles and applications to torsion free sheaves on nodal curves.* Arkiv for Matematik 30 (1992), 187-215.

[4] Bhosle Usha N. *Picard groups of the moduli spaces of vector bundles.* Math. Ann. 314 (1999) 245-263.

[5] Drézet, J.-M. *Faisceaux cohérents sur les courbes multiples* . Collect. Math. 57, 2 (2006), 121-171.

[6] Drézet, J.-M. *Paramétrisation des courbes multiples primitives* Adv. in Geom. 7 (2007), 559-612.

[7] Drézet, J.-M. *Déformations des extensions larges de faisceaux* . Pacific Journ. of Math. 220, 2 (2005), 201-297

[8] Drézet, J.-M. *Faisceaux sans torsion et faisceaux quasi localement libres sur les courbes multiples primitives.* Mathematische Nachrichten 282, No.7 (2009), 919-952.

[9] Eisenbud, D., Green, M. *Clifford indices of ribbons.* Trans. of the Amer. Math. Soc. 347, 3 (1995), 757-765.

[10] Godement, R. *Théorie des faisceaux.* Actualités scientifiques et industrielles 1252, Hermann, Paris (1964).

[11] González, M. *Smoothing of ribbons over curves.* Journ. für die reine und angew. Math. 591 (2006), 201-235.

[12] Inaba, M.-A. *On the moduli of stable sheaves on some nonreduced projective schemes.* Journ. of Alg. Geom. 13 (2004), 1-27.

[13] Inaba, M.-A. *On the moduli of stable sheaves on a reducible projective scheme and examples on a reducible quadric surface.* Nagoya Math. J. (2002), 135-181.

[14] Russo, B. Teixidor i Bigas, M. *On a conjecture of Lange.* J. Alg. Geom 8 (1999), 483-496.

[15] Seshadri, C.S. *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques.* Astérisque 96 (1982).

[16] Simpson, C.T. *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety I.* Publ. Math. IHES 79 (1994), 47-129.

[17] Sun, X. *Degeneration of moduli spaces and generalized theta functions.* Journ. of Alg. Geom. 9 (2000), 459-527.

[18] Sun X., *Degeneration of SL(n)-bundles on a reducible curve.* Proc. of Algebraic Geometry in East Asia (Japan, 2001) and math.AG/0112072.

[19] Teixidor i Bigas, M. *Moduli spaces of (semi-)stable vector bundles on tree-like curves.* Math. Ann. 290 (1191), 341-348.

[20] Teixidor i Bigas, M. *Moduli spaces of vector bundles on reducible curves.* Amer. J. of Math. 117 (1995), 125-139.

[21] Teixidor i Bigas, M. *Compactifications of moduli spaces of (semi)stable bundles on singular curves: two points of view. Dedicated to the memory of Fernando Serrano.* Collect. Math. 49 (1998), 527-548.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

E-mail address: drezet@math.jussieu.fr